



**UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK  
BRAUNSCHWEIG**

**Melanie Engel,  
D. Dinkler,  
A. Zilian**

**Weiterentwicklung eines mechanischen Modells zur  
Beschreibung Regen-Wind induzierter Schwingungen:  
Zwischenbericht August 2008**

Veröffentlicht: 19.08.2008

<http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00022955>

# **WEITERENTWICKLUNG EINES MECHANISCHEN MODELLS ZUR BESCHREIBUNG REGEN-WIND INDUZIERTER SCHWINGUNGEN**

- Zwischenbericht August 2008 -

Stipendiat:	Dipl.-Ing. Melanie Engel	Institut für Statik
Betreuer :	Prof. Dr.-Ing. D. Dinkler	Institut für Statik
	Prof. Dr.-Ing. A. Zilian	Institut für Statik
Beginn der Arbeit:	01.01.2006	

Der vorliegende Bericht gibt einen Überblick über den derzeitigen Stand des vom Graduiertenkolleg "Wechselwirkung von Struktur und Fluid" der TU Braunschweig geförderten Forschungsvorhabens zum Thema "Regen-Wind induzierte Seilschwingungen".

## **1 Problemstellung und Zielsetzung**

Regen-Wind induzierte Schwingungen können bei gleichzeitiger Einwirkung von Regen und Wind an Kabeln und Hängern auftreten. Gefährdet sind vor allem Schrägseilbrücken und abgehängte Bogenbrücken, ebenso abgespannte Maste, Freileitungen und Hängebrücken. Es können Schwingungen mit großen Amplituden entstehen, welche sich negativ auf die Lebensdauer und die Gebrauchstauglichkeit der Bauwerke auswirken. Eventuell erforderliche Sperren betroffener Brücken führen zu einer starken Beeinträchtigung des Verkehrs.

Ziel des Forschungsvorhabens ist die Erweiterung eines von Seidel [20, 21] entwickelten mechanischen Querschnittsmodells auf reale räumliche Seilkonfigurationen, um Amplituden, Frequenzen und Schwingungsformen beliebiger Seilkonstruktionen bereits in der Entwurfsphase vorhersagen zu können. Darüber hinaus soll untersucht werden, wie die Einsetzgeschwindigkeiten und die Schwingungsmoden mit Hilfe von Dämpferelementen an der Aufhängung beeinflusst werden können.

## 2 Zylinderumströmung

Eine sehr detaillierte Beschreibung der Kreiszylinderumströmung wird von Gölling in [10] vorgenommen, wobei auch speziell auf die Entwicklung der unterschiedlichen Wirbelstrukturen im unteren Reynoldszahlbereich eingegangen wird. Gölling weist jedoch darauf hin, dass, obwohl der querangeströmte Zylinder häufig Gegenstand experimenteller Untersuchungen war, bis heute der Instabilitätsmechanismus des laminar-turbulenten Übergangs der abgelösten Zylinder Grenzschicht nicht vollständig verstanden ist.

Die Reynoldszahl spielt eine wichtige Rolle bei der Umströmung eines Zylinders, da die Strömungsablösung häufig reynoldszahlabhängig ist. Die mit der Ablösung verbundenen unterschiedlichen Wirbelstrukturen, beeinflussen das Widerstandsverhalten des Körpers entscheidend. Die Definition der einzelnen Reynoldszahlbereiche erfolgte entsprechend Abbildung 1 in Anlehnung an Roshko [17].

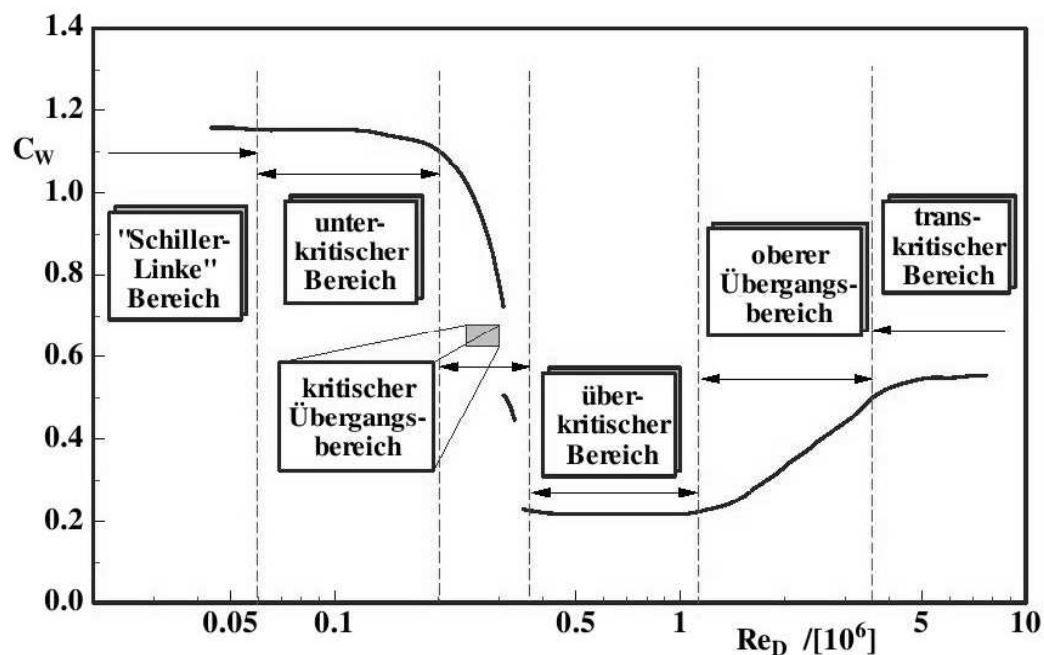


Abbildung 1: Definition der Reynoldszahlbereiche für die Zylinderumströmung nach [10] in Anlehnung an Roshko [17]

Im Schiller-Linke-Bereich ( $Re < 0,06 \cdot 10^5$ ) befindet sich der Transitionsort, an dem der laminar-turbulente Strömungsumschlag stattfindet, in der abgelösten Scherschicht. Mit zunehmender Reynoldszahl bewegt sich der Transitionsort weiter stromaufwärts, die Länge des Rezirkulationsgebietes nimmt ab und der Widerstandsbeiwert nimmt durch die Verbreiterung des Rezirkulationsgebietes kontinuierlich zu.

Im unterkritischen Bereich ( $0,06 \cdot 10^5 < Re < 2 \cdot 10^5$ ) löst die Grenzschicht laminar ab. Der Tran-

sitionsort befindet sich in der abgelösten Scherschicht konstant in einem gewissen Abstand zum Zylinder, und das Rezirkulationsgebiet hinter dem Zylinder wird nicht mehr kleiner [10]. Dadurch bleibt der  $c_w$ -Wert mit zunehmender Reynoldszahl konstant. Die Länge des Rezirkulationsgebietes beträgt etwa einen Zylinderdurchmesser.

Am Ende des unterkritischen Bereiches ändert sich die topologische Ablösestruktur: während für Reynoldszahlen unter  $1,2 \cdot 10^5$  die laminare Grenzschicht bei etwa  $75^\circ$  beidseitig periodisch an einer Ablöselinie ablöst, kommt es bei Reynoldszahlen um  $1,8 \cdot 10^5$  zur Ausbildung einer doppelten Ablöseblase. Diese weist Ablöselinien bei  $73^\circ$  bzw.  $90^\circ$  auf, dazwischen befindet sich eine Anlegelinie (siehe Abbildung 2). Diese neue Ablösestruktur ermöglicht den kontinuierlichen Abfall des Widerstandsbeiwertes ohne Änderung des periodischen Ablöseverhaltens zu Beginn des kritischen Bereiches ( $Re = 2 \cdot 10^5$ ). Der Winkel, unter dem die Grenzschicht am Zylinder ablöst, kann sich verändern, ohne dass sich der Azimutwinkel der Ablösung signifikant ändern muß. Dadurch kommt es zu einer Verringerung der Nachlaufbreite und somit zu einer Abnahme des  $c_w$ -Wertes bei gleichbleibender Strouhalzahl.

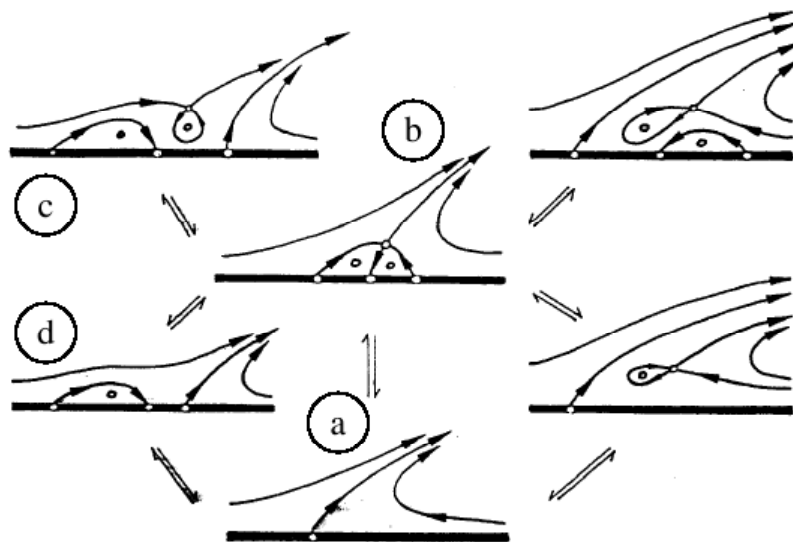


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Topologie möglicher zeitlich gemittelter Ablösestrukturen der Zylinderströmung aus Dallmann und Schewe [7]  
(a) Ablöselinie, (b) doppelten Ablöseblase, (c/d) Ablöseblase

Der kritische Bereich umfasst nur einen sehr kleinen Reynoldszahlausschnitt ( $2 \cdot 10^5 < Re < 3,5 \cdot 10^5$ ). Er setzt sich aus zwei diskontinuierlichen Übergängen zusammen.

Die Transition A erfolgt bis  $Re = 3,2 \cdot 10^5$ . Dabei erreicht auf einer Seite des Zylinders der Transitionsort die Ablöselinie, wodurch sich die turbulente, abgelöste Scherschicht wieder anlegt und eine transitionelle Ablöseblase entsteht. Die turbulente Grenzschicht löst später ab. Aufgrund der dadurch entstehenden Verringerung der Nachlaufbreite, kommt es zu einem Abfall

des  $c_w$ -Wertes von 0,7 auf 0,5. Nach der Transition A ( $3,2 \cdot 10^5 < Re < 3,5 \cdot 10^5$ ) liegt ein asymmetrischer abgelöster Strömungszustand vor. Der Betrag des Auftriebsbeiwertes ist 1, wobei beide Vorzeichen auftreten können, da es sich um einen bistabilen Zustand handelt.

Die Transition B bewirkt das Auftreten von je einer transitionellen Ablöseblase auf beiden Zylinderseiten. Dadurch wird die Breite des Nachlaufgebietes weiter verringert und der  $c_w$ -Wert fällt ab.

In Abhängigkeit von der Reynoldszahlrichtung werden entweder die Transitionen A und B (Re zunehmend) oder die Transitionen A\* und B\* (Re abnehmend) durchlaufen (Abbildung 4).

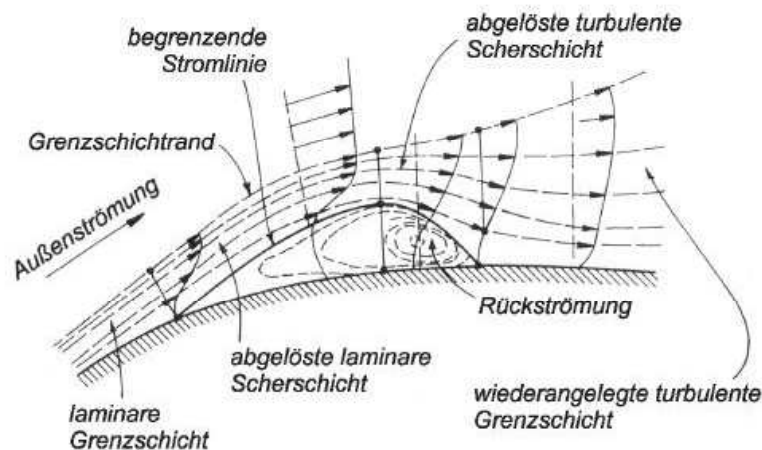


Abbildung 3: Laminare Ablöseblase (nach Lakshminarayana [13])

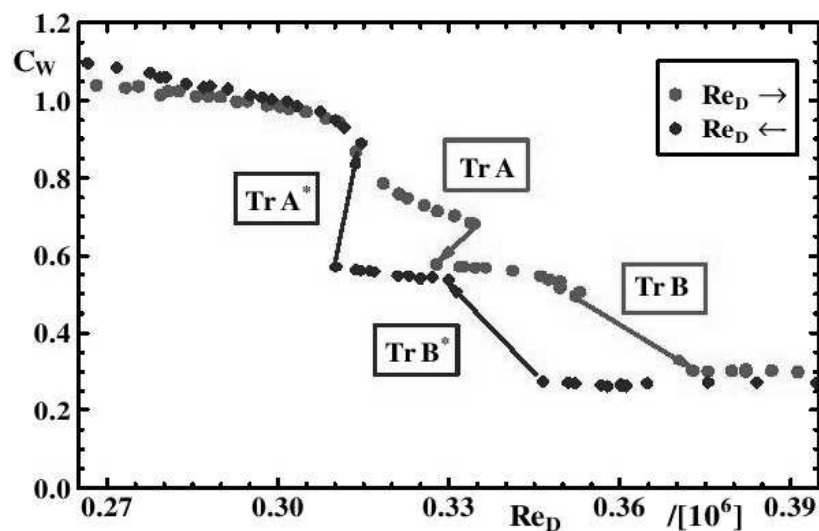


Abbildung 4: Verhalten des  $c_w$ -Wertes im kritischen Übergangsbereich in Abhängigkeit von der Reynoldszahlrichtung [10])

Im oberen Übergangsbereich bewegt sich der Transitionsort mit zunehmender Reynoldszahl stromaufwärts, wodurch sich das Rezirkulationsgebiet vergrößert. Die Ablöseblasen wachsen und werden instabil bzw. platzen.

Bei Erreichen des transkritischen Bereiches ( $Re > 5 \cdot 10^6$ ) findet der laminar-turbulente Übergang in der am Zylinder anliegenden Grenzschicht statt. Die Ablösung erfolgt turbulent etwa am Dickenmaximum des Zylinders. Der  $c_w$ -Wert befindet sich somit zwischen dem des unterkritischen und dem des überkritischen Bereiches.

In Abbildung 5 sind wesentliche Merkmale der oben beschriebenen Reynoldszahlbereiche, wie Ablösepunkt, Transitionsort oder Ablöseblasen, vereinfacht dargestellt.

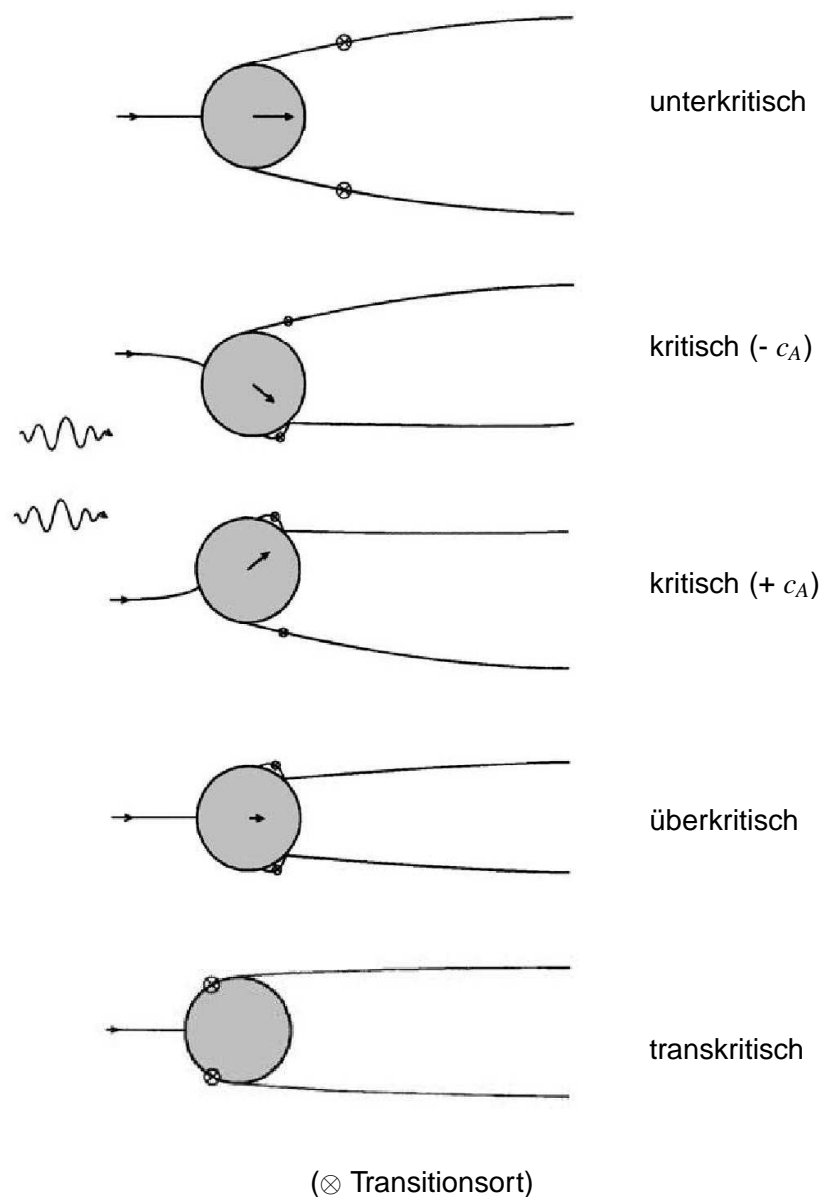


Abbildung 5: Zylinderumströmung (nach Dallmann und Schewe [7])

### 3 Erregungsmechanismus

In der Literatur werden verschiedene Ursachen für das Auftreten von Regen-Wind induzierten Seilschwingungen in Betracht gezogen. Eine Zusammenfassung des Erkenntnisstandes ist in [16] zu finden. Seidel diskutiert in [20] Wirbelablösung, konventionelles Galloping, Nachlaufgalloping und Zwei-Freiheitsgrad-Galloping und schließt diese als Ursachen aus. Er setzt einen Selbsterregungsmechanismus voraus, der auf dem Prinzip des Prandtlschen Stolperdrahtes basiert. Bei einer Kugel bewirkt ein stromauf der laminaren Ablösestelle befestigter Drahtreiß einen Umschlag von unter- zu überkritischer Strömung. Dies erfolgt bei einer wesentlich kleineren Reynoldszahl als bei einer ungestörten Kugel. Durch den Stolperdraht wird die Grenzschicht turbulent, die Strömung legt sich an und löst erst später wieder ab. Aufgrund der dadurch veränderten Druckverteilung kommt es zu einer Reduzierung des Strömungswiderstandes der Kugel und einer Anregung in Strömungsrichtung.

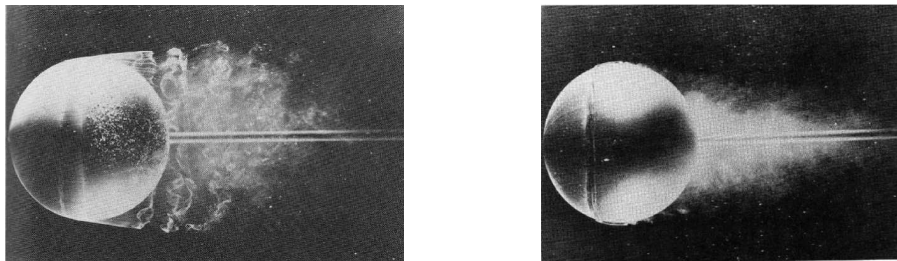


Abbildung 6: Kugelumströmung a) ohne b) mit Prandtlischem Stolperdraht [15]

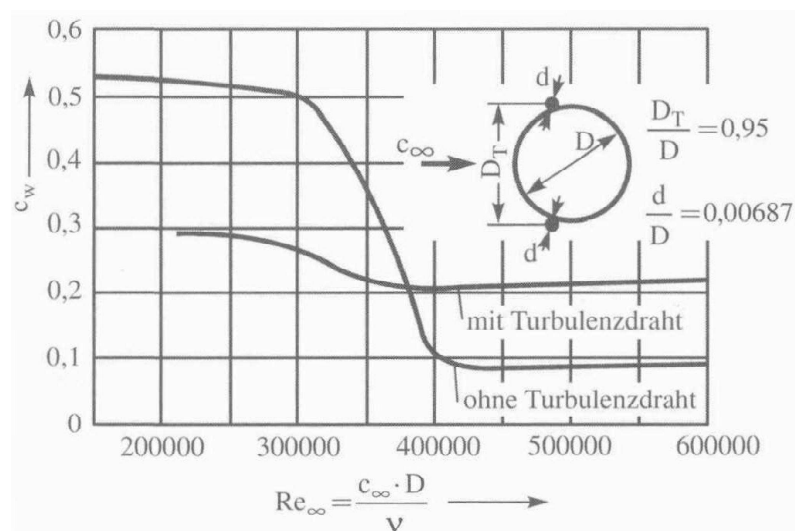


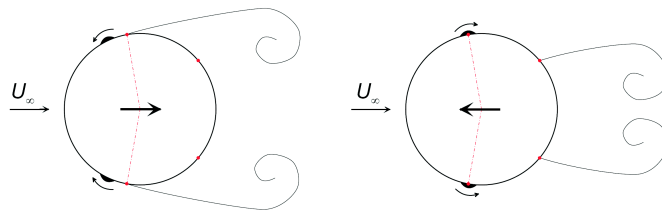
Abbildung 7: Einfluß der erzwungenen Transition durch einen Stolperdraht an einer Kugel [11]

Das Phänomen des Prandtlschen Stolperdrahtes lässt sich nicht nur an Kugeln, sondern auch an Zylindern beobachten. Im Gegensatz zur festen Störung des Prandtlschen Stolperdrahtes

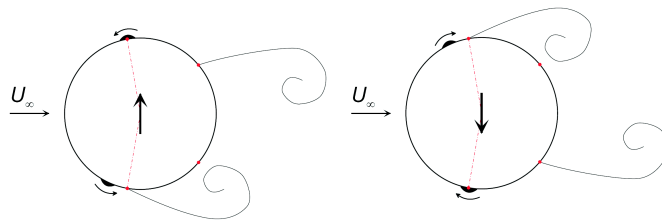
liegen bei Regen-Wind induzierten Schwingungen bewegliche Störungen in Form von Rinnsalen vor. Zwischen der Bewegung der Kabel und der der Rinnsale besteht eine Interaktion. Die Rinnsale oszillieren um den Umschlagpunkt und bewirken einen regelmäßigen Strömungsumschlag zwischen unter- und überkritischer Umströmung, wodurch eine Schwingung des Seilquerschnitts induziert werden kann.

Die Schwingungsrichtung des Seiles hängt von der Position der Rinnsale ab. In Abbildung 8 sind drei mögliche Fälle dargestellt. Im ersten Fall oszillieren beide Rinnsale gleichsinnig um die Umschlagpunkte. Es entsteht ein symmetrischer Nachlauf, der eine Anregung parallel zur Anströmungsrichtung bewirkt. Im zweiten Fall bildet sich ein unsymmetrischer Nachlauf aus, da sich das eine Rinnsal im Bereich des Umschlagpunktes befindet und eine Strömungsablösung am Ablösepunkt der überkritischen Strömung bewirkt, während das andere Rinnsal vor dem Umschlagpunkt liegt, wodurch dort die Strömung am Ablösepunkt der unterkritischen Strömung ablöst. Es entsteht eine dominierende Seilschwingung senkrecht zur Anströmungsrichtung. Ist nur ein Rinnsal im Bereich des Umschlagpunktes vorhanden, erfolgt eine Anregung in Längs- und in Querrichtung.

(1) Längsschwingungen



(2) Querschwingungen



(3) Längs- u. Querschwingungen

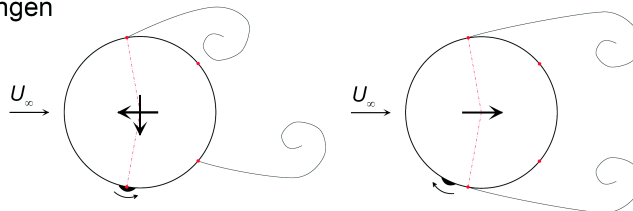


Abbildung 8: Schwingungsformen [20]



## 4 Mechanisches Modell und Bewegungsgleichungen

Für die vorliegende Phänomenologie entwickelt Seidel [20, 21] ein zweidimensionales mechanisches Modell, dem die Annahme zu Grunde liegt, dass es sich bei den Kabeln um unendlich lange Zylinder handelt. Aus dem Gleichgewicht am Seilquerschnitt in horizontaler und vertikaler Richtung und an den beiden Rinnsalen in Tangential- und Normalrichtung folgen sechs nichtlineare, gekoppelte Bewegungsgleichungen.

Das in dieser Arbeit beschriebene dreidimensionale mechanische Modell basiert auf der von Seidel vorgestellten Phänomenologie und dem daraus entwickelten Modell. Es besitzt fünf Freiheitsgrade (Abbildung 9): drei translatorische Freiheitsgrade des Kabels ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) sowie zwei rotatorische zur Beschreibung der Rinnsalbewegung auf der Seiloberfläche ( $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ).

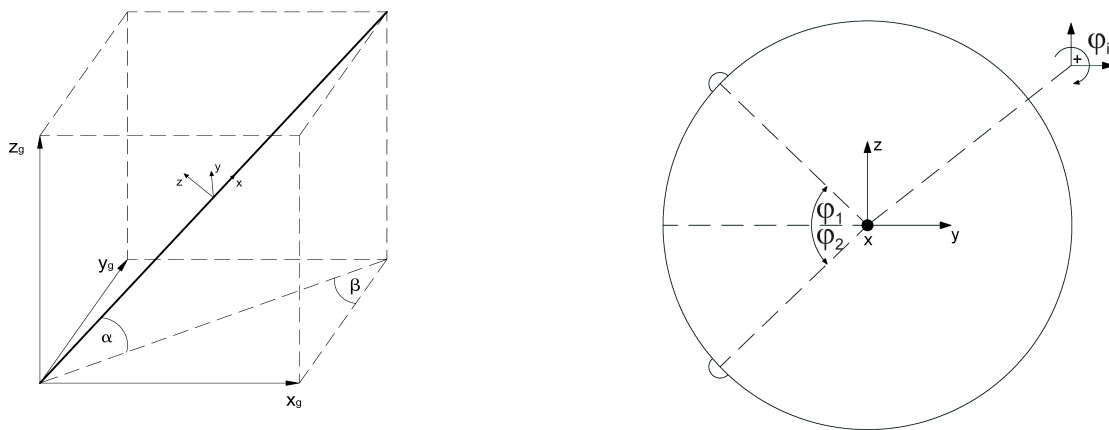


Abbildung 9: Dreidimensionales Modell - Freiheitsgrade

Die am Seil und an den Rinnsalen angreifenden Kräfte werden in Abbildung 10 verdeutlicht. Es wirken zum einen Trägheits-, Feder- und Dämpferkräfte und zum anderen das Eigengewicht. Darüber hinaus existieren Reaktionskräfte zwischen dem Seil und den Rinnsalen in normaler und tangentialer Richtung ( $N_{Zi}$ ,  $T_{Zi}$ ) und die Windkräfte auf das Kabel ( $F_{wy}$ ,  $F_{wz}$ ) bzw. auf die Rinnsale ( $F_{wN_i}$ ,  $F_{wT_i}$ ).

Aus dem Kräftegleichgewicht am Seil in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung und an den beiden Rinnsalen in Tangentialrichtung folgen fünf nichtlineare, gekoppelte Bewegungsgleichungen.

$$\Sigma X : (m_s + m_{w1} + m_{w2}) \cdot \ddot{x} = -d_x \cdot \dot{x} - k_x \cdot x - (m_s + m_{w1} + m_{w2}) \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma Y: \quad (m_s + m_{w1} + m_{w2}) \cdot \ddot{y} &= -d_y \cdot \dot{y} - k_y \cdot y + F_{wy} \\
&+ m_{w1} \cdot R \cdot \sin \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + m_{w1} \cdot R \cdot \dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos \varphi_1 \\
&+ m_{w2} \cdot R \cdot \sin \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + m_{w2} \cdot R \cdot \dot{\varphi}_2^2 \cdot \cos \varphi_2
\end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma Z: \quad (m_s + m_{w1} + m_{w2}) \cdot \ddot{z} &= -d_z \cdot \dot{z} - k_z \cdot z + F_{wz} \\
&+ m_{w1} \cdot R \cdot \cos \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - m_{w1} \cdot R \cdot \dot{\varphi}_1^2 \cdot \sin \varphi_1 \\
&+ m_{w2} \cdot R \cdot \cos \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - m_{w2} \cdot R \cdot \dot{\varphi}_2^2 \cdot \sin \varphi_2
\end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma M_1: \quad m_{w1} \cdot \sin \varphi_1 \cdot \ddot{y} &= -m_{w1} \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_1 + F_{wT1} - T_{Z1} \\
&+ m_{w1} \cdot \cos \varphi_1 \cdot \ddot{z} \\
&+ m_{w1} \cdot R \cdot \ddot{\varphi}_1
\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma M_2: \quad m_{w2} \cdot \sin \varphi_2 \cdot \ddot{y} &= -m_{w2} \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_2 + F_{wT2} - T_{Z2} \\
&+ m_{w2} \cdot \cos \varphi_2 \cdot \ddot{z} \\
&+ m_{w2} \cdot R \cdot \ddot{\varphi}_2
\end{aligned} \quad (5)$$

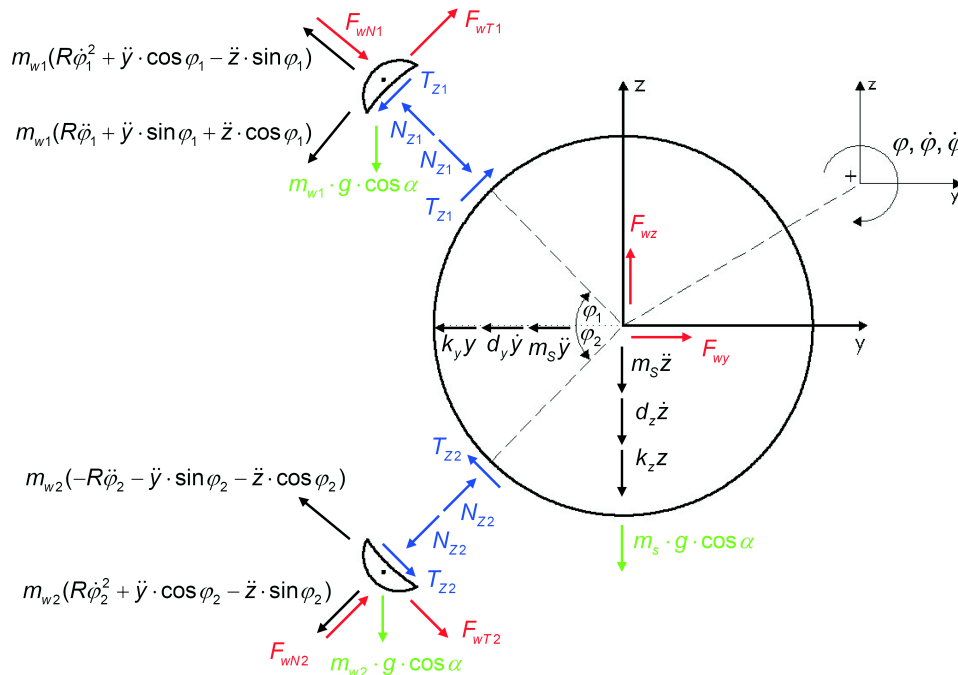


Abbildung 10: Kräfteinwirkungen am Seilquerschnitt

Die Reaktionskräfte zwischen dem Kabel und den Rinnsalen senkrecht zur Kabeloberfläche ( $N_{Zi}$ ) können im Nachlauf berechnet werden. Dieses Vorgehen verringert die Berechnungszeit und beugt möglichen numerischen Problemen, die aus der unterschiedlichen Größenordnung der Unbekannten entstehen können, vor.

Die Reaktionskräfte  $N_{Zi}$  werden herangezogen, um zu überprüfen, ob ein Rinnsal auf der Kabeloberfläche verbleibt oder durch Überschreitung der Oberflächenspannung  $\sigma_0$  abgeschlagen wird. Sie werden aus dem Gleichgewicht am Tropfen in normaler Richtung ermittelt.

$$N_{Zi} = -m_{wi} \cdot (R \cdot \dot{\phi}_i^2 + \ddot{y} \cdot \cos \phi_i - \ddot{z} \cdot \sin \phi_i) + F_{wNi} + m_{wi} \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \sin \phi_i \quad (6)$$

Die Haftbedingung lautet:

$$\sigma_0 \cdot \underbrace{2 \cdot L_{Rinnsal}}_{\approx U_{Rinnsal}} \cdot \sin \alpha + N_{Zi} \geq 0. \quad (7)$$

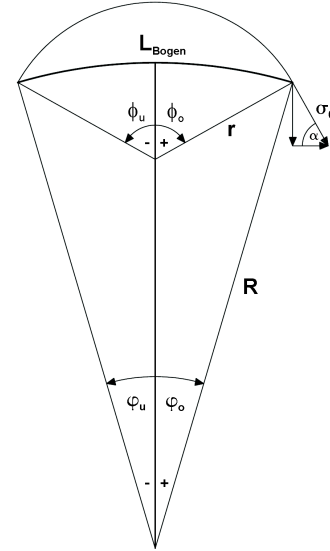


Abbildung 11: Winkeldefinitionen

#### 4.1 Reibungskräfte zwischen Rinnsal und Seil ( $T_{Zi}$ )

Die Rinnsale bewegen sich nicht direkt auf der Kabeloberfläche, sondern gleiten auf einem Wasserfilm, der sich auf der Seiloberfläche ausbildet. Dieses wurde auch von N. Cosentino [6] in Experimenten beobachtet.

Die Situation im Wasserfilm ist mit der Couette-Strömung [18] vergleichbar, bei der eine Strömung in einem Spalt zwischen zwei Platten durch deren Relativbewegung  $v_{rel}$  erzeugt wird. Im Fall einer reinen Couette-Strömung ohne Druckgradient liegt eine konstante Schubspannungsverteilung vor, was durch Anwendung des Impulssatzes auf ein Kontrollvolumen gezeigt werden kann.

Mit der Annahme eines Newtonschen Fluids

$$\tau = \mu_w \cdot \frac{du}{dy} \quad (8)$$

mit der dynamischen Viskosität  $\mu_w$  und den Randbedingungen  $u(y=0) = 0$  und  $u(y=h) = v_{rel}$  ergeben sich durch Integration die lineare Geschwindigkeitsverteilung

$$u(y) = v_{rel} \cdot \frac{y}{h} \quad (9)$$

und daraus die Schubspannungsverteilung  $\tau_0$  über die Wasserfilmhöhe

$$\tau_0 = \mu_w \cdot \frac{v_{rel}}{h} = \mu_w \cdot \frac{R \cdot \dot{\phi}_i}{h}. \quad (10)$$

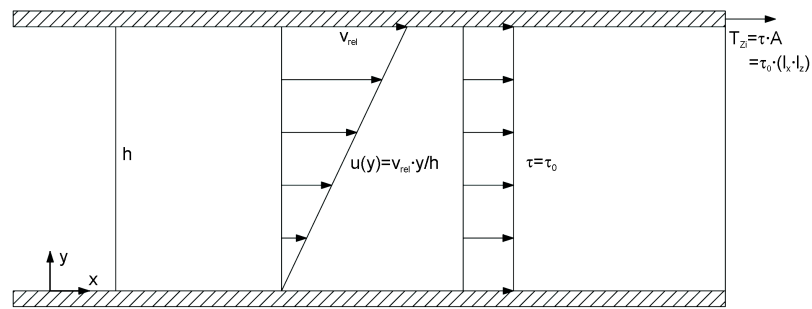


Abbildung 12: Laminare Couette-Strömung

Die auf das Rinnsal wirkende Reibungskraft berechnet sich damit im Gegensatz zu [20, 21] wie folgt:

$$T_{Zi} = A \cdot \tau_0 = (L_{\text{Rinnsal}} \cdot L_{\text{Bogen}}) \cdot \mu_w \cdot \frac{R \cdot \dot{\phi}_i}{h}. \quad (11)$$

In der Arbeit von N. Cosentino [6] sind von ihm gemessene Zeitverläufe der Wasserfilmhöhe dargestellt. Daraus ergibt sich eine mittlere Höhe  $h$  für den Gleitfilm von ungefähr 0,2 mm.

#### 4.2 Auf das Seil wirkende aerodynamische Kräfte ( $F_{wy}$ , $F_{wz}$ )

Abbildung 13 zeigt die räumliche Darstellung eines Kabels, das mit der ungestörten Windgeschwindigkeit  $U_\infty$  angeströmt wird. Die Neigungswinkel  $\alpha$  und der Anstellwinkel  $\beta$  definieren die Anströmungsrichtung. Aus der in Abbildung 14 dargestellten Zerlegung des Windvektors in parallel und senkrecht zur Kabelachse wirkende Komponenten ergibt sich die effektive Windgeschwindigkeit  $U$ . Diese greift unter dem räumlichen Anströmwinkel  $\beta_0$  am Seilquerschnitt an. Die Komponente der Windgeschwindigkeit in Richtung der Seillängsachse ist vernachlässigbar, da eine Krafteinleitung nur über Reibung erfolgt und die Größe der daraus resultierenden Kraft im Vergleich zur Vorspannkraft des Kabels sehr gering ist.

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \arctan \left( \frac{U_{\infty,z}}{U_{\infty,y}} \right) \\ &= \arctan (\tan \beta \cdot \sin \alpha) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_{\infty,z}^2 + U_{\infty,y}^2} \\ &= U_\infty \cdot \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} \end{aligned} \quad (13)$$

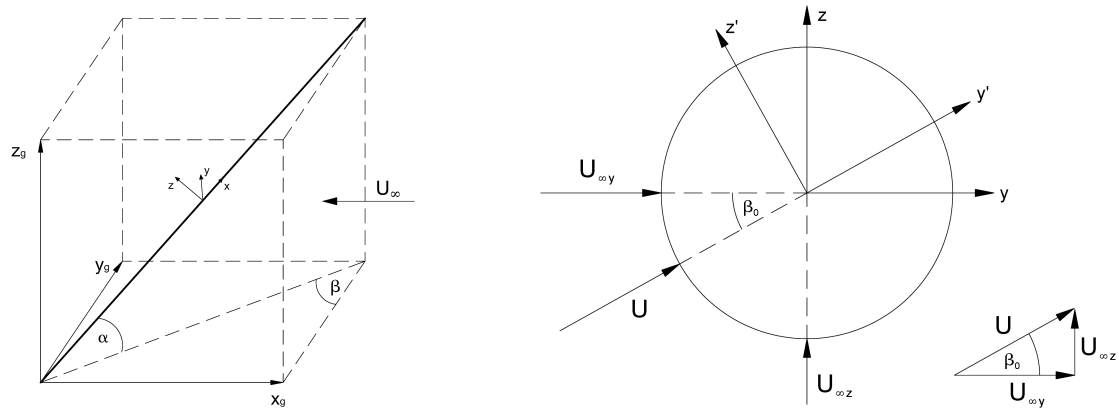


Abbildung 13: Definition der Winkel und der Koordinatensysteme

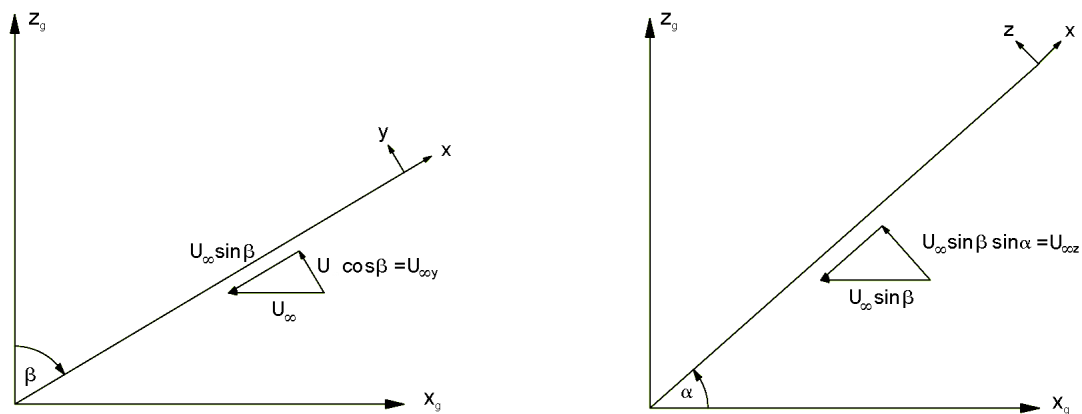


Abbildung 14: Zerlegung des Windvektors: a) Draufsicht b) Ansicht

Aufgrund der Bewegung des Seiles mit den Geschwindigkeiten  $\dot{y}'$  und  $\dot{z}'$  ändert sich die Anströmung des Querschnittes. Er wird mit der relativen Windgeschwindigkeit  $U_{rel}$  unter dem Winkel  $\beta_r$  angeströmt (Abbildung 15).

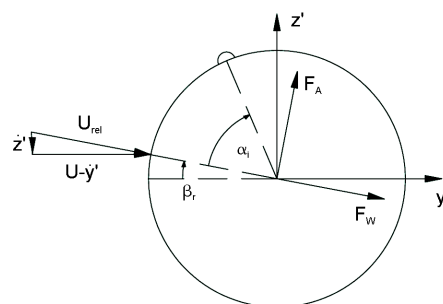


Abbildung 15: Relative Anströmgeschwindigkeit und relativer Anströmwinkel

$$\beta_r = \arctan \left( \frac{\dot{z}'}{U - \dot{y}'} \right) \quad (14)$$

$$U_{rel}^2 = (U - \dot{y}')^2 + \dot{z}'^2 \quad (15)$$

Die Auftriebs- und die Widerstandskraft auf das Kabel lassen sich unter Annahme der quasi-stationären Theorie [22] wie folgt berechnen.

$$F_A = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot A \cdot \left[ (U - \dot{y}')^2 + \dot{z}'^2 \right] \cdot [c_{A1} (\varphi_1 + \beta_0 - \beta_r) + c_{A2} (\varphi_2 + \beta_0 - \beta_r)] \quad (16)$$

$$F_W = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot A \cdot \left[ (U - \dot{y}')^2 + \dot{z}'^2 \right] \cdot [c_{W1} (\varphi_1 + \beta_0 - \beta_r) + c_{W2} (\varphi_2 + \beta_0 - \beta_r)] \quad (17)$$

Darin stellt  $\rho_L$  die Dichte der Luft dar. Im Gegensatz zu [20, 21] wird hier die effektive Windgeschwindigkeit  $U$  an Stelle der ungestörten Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  verwendet.

Die aerodynamischen Beiwerte  $c_{Ai}$  und  $c_{Wi}$  ergeben sich aus der Integration der jeweiligen Druckverteilung. Sie hängen von der aktuellen Position der Rinnsale ab.

$$c_{Ai} = \int_{0^\circ}^{180^\circ} c_p(\varphi_i) \cdot \sin \varphi_i \, d\varphi$$

$$c_{Wi} = \int_{0^\circ}^{180^\circ} c_p(\varphi_i) \cdot \cos \varphi_i \, d\varphi \quad (18)$$

Anschließend ist eine Transformation der aerodynamischen Kräfte in das y-z-Koordinatensystem durchzuführen (Abbildung 16), in dem auch die Bewegungsgleichungen aufgestellt werden.

$$F_y = F_W \cdot \cos(\beta_0 - \beta_r) - F_A \cdot \sin(\beta_0 - \beta_r) \quad (19)$$

$$F_z = F_W \cdot \sin(\beta_0 - \beta_r) + F_A \cdot \cos(\beta_0 - \beta_r) \quad (20)$$

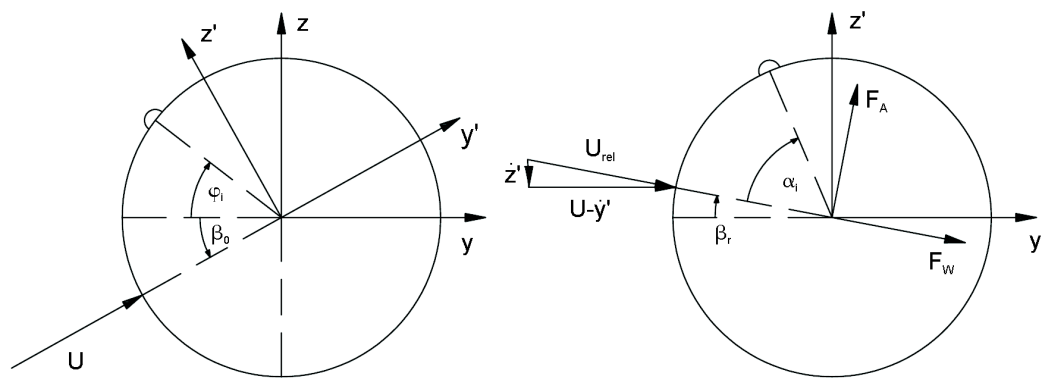


Abbildung 16: Transformation der Windkräfte

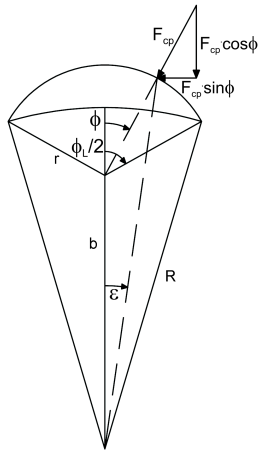
### 4.3 Auf die Rinnsale wirkende aerodynamische Kräfte ( $F_{wTi}$ , $F_{wNi}$ )

#### 4.3.1 Berechnung aus Druck- und Schubspannungsverteilungen

Die auf die Rinnsale wirkenden Windkräfte setzen sich aus einem Winddruckanteil ( $F_{cp}$ ) und einem Reibungsanteil Luft-Rinnsal ( $F_{SK}$ ) zusammen.

#### Staudruckanteil $F_{cp}$

Der Winddruckanteil wird auf Basis der effektiven Windgeschwindigkeit  $U$  berechnet. Darüber hinaus wird zur Bestimmung des  $c_p$ -Wertes der Winkel  $\varepsilon$  herangezogen.



$$\varepsilon = \arcsin \left( \frac{\sin(180^\circ - \phi) \cdot r}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2 \cdot r \cdot b \cdot \cos(180^\circ - \phi)}} \right) \quad (21)$$

Abbildung 17: Definition der Rinnsalwinkel

$$F_{cpTi} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot [(U - \dot{y}')^2 + \dot{z}'^2] \cdot \int_{\phi_u}^{\phi_o} c_p(\phi_i + \beta_0 - \beta_r + \varepsilon) \cdot \sin \phi \cdot r \, d\phi \quad (22)$$

$$F_{cpNi} = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot [(U - \dot{y}')^2 + \dot{z}'^2] \cdot \int_{\phi_u}^{\phi_o} c_p(\phi_i + \beta_0 - \beta_r + \varepsilon) \cdot \cos \phi \cdot r \, d\phi \quad (23)$$

Aufgrund der komplexen Struktur des Integranden ist eine analytische Auswertung des Integrals nicht mehr möglich. Es wird daher eine numerische Integration nach Gauss mit vier Stützstellen durchgeführt. Um diese auszuführen, wird zunächst eine Koordinatentransformation vorgenommen.  $\phi_L$  stellt dabei den Öffnungswinkel des Tropfens dar. Für ein Rinnsal mit konstantem Radius gilt:

$$F_{cp,Ti} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot r \cdot [(U - \dot{y}')^2 + \dot{z}'^2] \cdot \int_{-1}^{+1} c_p \left( \phi_i + \beta_0 - \beta_r + \arcsin \left( \frac{\sin(180^\circ - \xi \cdot \frac{\phi_L}{2}) \cdot r}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2 \cdot r \cdot b \cdot \cos(180^\circ - \xi \cdot \frac{\phi_L}{2})}} \right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\phi_L}{2} \xi\right) \cdot \frac{\phi_L}{2} \, d\xi$$

$$\begin{aligned}
F_{c_p, T_i} &\approx \sum f(\xi_{GP}) \cdot w_i \\
&\approx -\frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot r \cdot [(U - \dot{y}')^2 + \dot{z}'^2] \cdot \\
&\quad \left[ c_p \left( \varphi_i + \beta_0 - \beta_r + \arcsin \left( \frac{\sin(180^\circ - \xi_1 \frac{\phi_L}{2}) \cdot r}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cdot \cos(180^\circ - \xi_1 \frac{\phi_L}{2})}} \right) \right) \cdot \sin(\xi_1 \frac{\phi_L}{2}) \cdot \frac{\phi_L}{2} \cdot w_1 \right. \\
&\quad c_p \left( \varphi_i + \beta_0 - \beta_r + \arcsin \left( \frac{\sin(180^\circ - \xi_2 \frac{\phi_L}{2}) \cdot r}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cdot \cos(180^\circ - \xi_2 \frac{\phi_L}{2})}} \right) \right) \cdot \sin(\xi_2 \frac{\phi_L}{2}) \cdot \frac{\phi_L}{2} \cdot w_2 \\
&\quad c_p \left( \varphi_i + \beta_0 - \beta_r + \arcsin \left( \frac{\sin(180^\circ - \xi_3 \frac{\phi_L}{2}) \cdot r}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cdot \cos(180^\circ - \xi_3 \frac{\phi_L}{2})}} \right) \right) \cdot \sin(\xi_3 \frac{\phi_L}{2}) \cdot \frac{\phi_L}{2} \cdot w_3 \\
&\quad \left. c_p \left( \varphi_i + \beta_0 - \beta_r + \arcsin \left( \frac{\sin(180^\circ - \xi_4 \frac{\phi_L}{2}) \cdot r}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cdot \cos(180^\circ - \xi_4 \frac{\phi_L}{2})}} \right) \right) \cdot \sin(\xi_4 \frac{\phi_L}{2}) \cdot \frac{\phi_L}{2} \cdot w_4 \right]
\end{aligned}$$

Die Stützstellen  $\xi_i$  und die zugehörigen Wichtungsfaktoren  $w_i$  lauten:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= 0.339981043585 & w_1 &= 0.652145154863 \\
\xi_2 &= -0.339981043585 & w_2 &= 0.652145154863 \\
\xi_3 &= 0.861136311594 & w_3 &= 0.347854845137 \\
\xi_4 &= -0.861136311594 & w_4 &= 0.347854845137
\end{aligned}$$

### Scherkraftanteil $F_{SK_T}$

Von H. Blasius [3] wurde ein Berechnungsverfahren für allgemeine Grenzschichten mit beliebiger Geschwindigkeitsverteilung entwickelt, das auf einer Reihenentwicklung der Lösung in Potenzen von  $x$  basiert. Eine ausführliche Darstellung des Vorgehens ist in [19, 18] zu finden. Dabei werden aus einer gegebenen Geschwindigkeitsverteilung der Außenströmung eines symmetrisch umströmten Körpers

$$U(x) = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots \quad (24)$$

die Wandschubspannungen bis zum Ablösepunkt der Strömung berechnet.

$$\begin{aligned}
\tau_w(x) &= \rho_L u_1 \sqrt{v u_1} \left[ x \cdot 1,2326 + 4x^3 \frac{u_3}{u_1} 0,7244 \right. \\
&\quad \left. + 6x^5 \left( \frac{u_5}{u_1} 0,6374 + \frac{u_3^2}{u_1^2} 0,1192 \right) \right. \\
&\quad \left. + 8x^7 \left( \frac{u_7}{u_1} 0,5792 + \frac{u_3 u_5}{u_1^2} 0,1829 + \frac{u_3^2}{u_1^3} 0,0076 \right) + \dots \right] \quad (25)
\end{aligned}$$



Darin entspricht  $x$  der entlang des Zylinderumfangs gemessenen Laufkoordinate beginnend am Staupunkt.

$$x = \alpha_i \cdot R = \left( \varphi_i + \beta_0 - \arctan \left( \frac{z'}{U - y'} \right) \right) \cdot R \quad (26)$$

H. L. Evans [8] gibt folgende experimentell ermittelte Geschwindigkeitsverteilungen für die unterkritische Kreiszyylinder-Strömung an:

$$\begin{aligned} U(x) &= U_0 \cdot \left( 3,64 \cdot \frac{x}{D} - 3,20 \cdot \frac{x^3}{D^3} \right) \\ &= \underbrace{3,64 \frac{U_0}{D}}_{u_1} \cdot x - \underbrace{3,20 \frac{U_0}{D^3}}_{u_3} \cdot x^3 \end{aligned} \quad (27)$$

Diese weicht aufgrund des Verdrängungseffektes von der Geschwindigkeitsverteilung nach Potentialtheorie ab.

Die auf das Rinnsal wirkende Scherkraft ergibt sich zu:

$$F_{SK_T} = \tau_w(x) \cdot (L_{Rinnsal} \cdot L_{Bogen}) \quad (28)$$

Für die überkritische Zylinderumströmung wird die von Achenbach [1] gemessene Schubspannungsverteilung verwendet.

#### 4.3.2 Berechnung mit Hilfe eines Beiwertes

Ein zweiter in dieser Arbeit verfolgter Ansatz besteht darin, die tangentialen aerodynamischen Kräfte auf die Rinnsale mit Hilfe eines Beiwertes  $c_T$  auszudrücken. Dieser wird aus experimentell bestimmten Gleichgewichtslagen ermittelt und beinhaltet auch Einflüsse aus der Rinnsalverformung, welche zuvor nicht berücksichtigt wurden.

$$F_{wTi} = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot U_{rel}^2 \cdot R \cdot c_T(\bar{\varphi}, R) \quad (29)$$

Aus dem statischen Gleichgewicht am Rinnsal

$$m_w \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\bar{\varphi} - \beta_0) - \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot U_{rel}^2 \cdot R \cdot c_T = 0 \quad (30)$$

kann bei bekannter Windgeschwindigkeit und gemessenem Winkel  $\bar{\varphi}$  der  $c_T$ -Beiwert berechnet werden.

$$c_T(\bar{\varphi}, R) = \frac{m_w \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\bar{\varphi} - \beta_0)}{\frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot U_{rel}^2 \cdot R} \quad (31)$$

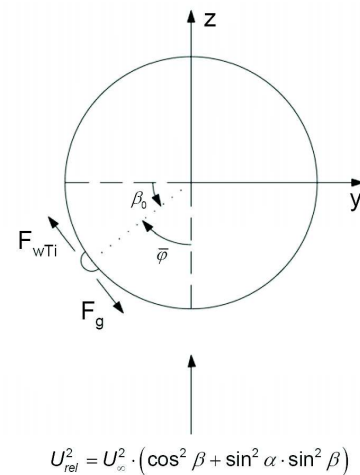


Abbildung 18: Statisches Gleichgewicht

Für die auf diese Weise aus unveröffentlichten Experimenten von Seidel berechneten diskreten Werte werden Trendlinien für einzelne Bereiche bestimmt.

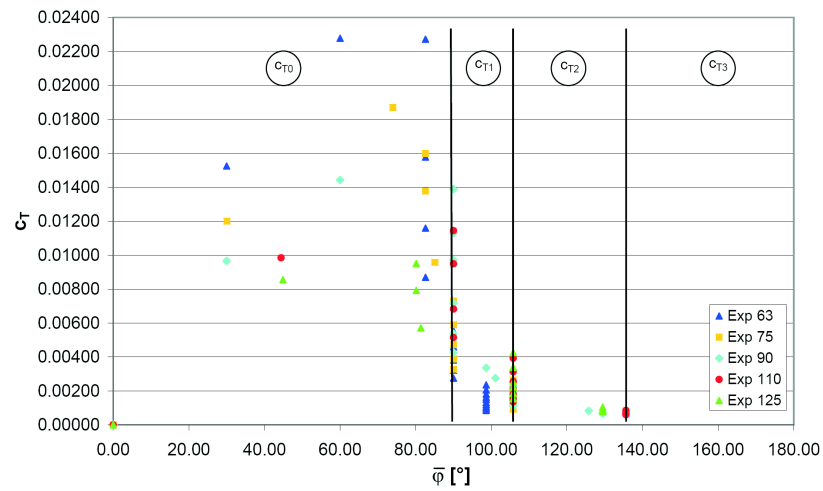


Abbildung 19:  $c_T(\bar{\varphi}, R)$  für verschiedene Seildurchmesser [mm] (HDPE-Rohre)

Die Sprungstellen werden mit Hilfe von Übergangsfunktionen  $\gamma_{ij}$  dargestellt. Darin gibt  $\varphi_{ij}$  den Winkel an, bei dem ein Sprung in der Strömungscharakteristik stattfindet. Der Vorfaktor  $\varepsilon$  bestimmt die Umgebung des Übergangs und damit die Steigung.

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(\varepsilon \cdot (\bar{\varphi} - \varphi_{ij})) + 0,5 \quad (32)$$

$$c_T(\bar{\varphi}, R) = [[c_{T0} \cdot \gamma_{01} + c_{T1} \cdot (1 - \gamma_{01})] \cdot \gamma_{12} + c_{T2} \cdot (1 - \gamma_{12})] \cdot \gamma_{23} + c_{T3} \cdot (1 - \gamma_{23}) \quad (33)$$

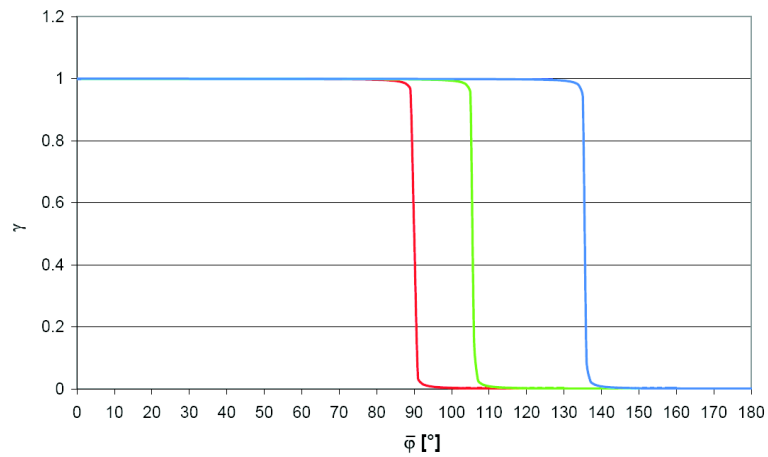


Abbildung 20: Übergangsfunktionen  $\gamma_{ij}$

Abbildung 21 zeigt die mit Gleichung (33) berechneten  $c_T$ -Beiwerte für verschiedene Seildurchmesser.

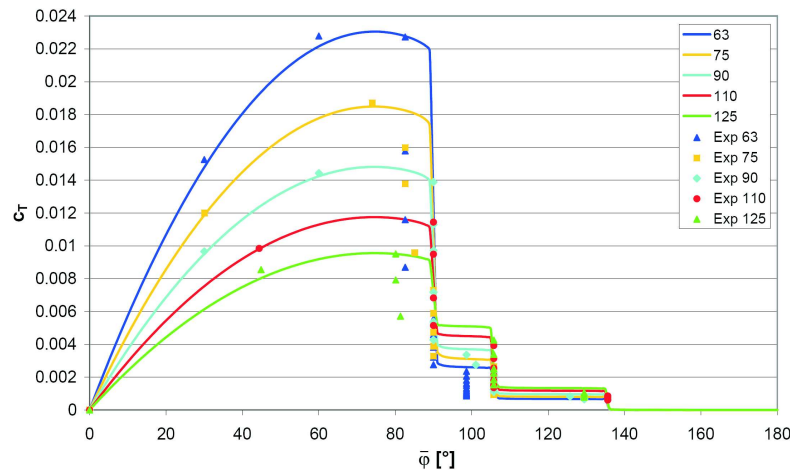


Abbildung 21:  $c_T(\bar{\varphi}, R)$  für verschiedene Seildurchmesser [mm]

Darüber hinaus ist es erforderlich, die Verzweigungsgeschwindigkeit zu bestimmen, bei der die Rinnsale die Nulllage verlassen. Dazu wird eine Linearisierung um den Verzweigungspunkt  $\bar{\varphi} = 0,0$  vorgenommen.

$$\left( -m_w \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \sin(\bar{\varphi} - \beta_0) - \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot U_{rel}^2 \cdot R \cdot c_{T,\bar{\varphi}} \right) \Big|_{\bar{\varphi}=0,0} \cdot d\bar{\varphi} = 0 \quad (34)$$

Die Verzweigungsgeschwindigkeit ergibt sich damit zu

$$U_{\infty, Verzw} = \sqrt{\frac{-m_w \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \sin(-\beta_0)}{\frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta) \cdot R \cdot c_{T,\bar{\varphi}}(0, R)}} \quad (35)$$

## 5 Numerische Umsetzung

### 5.1 Räumliche Diskretisierung des Seiles mit Hilfe der Finite Elemente Methode

Ein Seil ist ein Tragwerk, das nur Spannungen in Richtung seiner Längsachse aufnehmen kann. Es ist aufgrund der fehlenden Biegesteifigkeit in unverformter Lage kinematisch und kann erst im verformten Zustand Lasten in Querrichtung aufnehmen. Seilkonstruktionen sind geometrisch nichtlinear, da die aktuellen Seilkräfte von den Knotenverschiebungen abhängen und die aktuellen Knotenverschiebungen auch die Richtungen der Seilkräfte festlegen.

Die räumliche Diskretisierung des Kabels erfolgt mit Hilfe eines Zwei-Knoten-Stabelementes, mit dem auch große Verschiebungen abgebildet werden können, wie sie bei Seilen auftreten. Eine ausführliche Herleitung der Tangentensteifigkeitsmatrix  $K_T$  unter Verwendung der Total Lagrangeschen Formulierung ist in [2] zu finden. Zusätzlich wird die Annahme kleiner Verzerungen getroffen.

Die Steifigkeitsmatrix  $K_T$  setzt sich aus zwei Anteilen zusammen.  $K_E$  stellt die elastische Steifigkeit und  $K_G$  die geometrische Steifigkeit infolge der vorhandenen Zugkraft im Element dar.  $L_{(t)}$  und  $S_{(t)}$  entsprechen der aktuellen Elementlänge bzw. -kraft (inklusive Vorspannung).

$$\begin{aligned}
 K_{T(t-1)}^{(t)} &= K_{E(t-1)}^{(t)} + K_{G(t-1)}^{(t)} \\
 &= \frac{EA}{L_{(t)}^3} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \cdot \Delta x & \Delta x \cdot \Delta y & \Delta x \cdot \Delta z & -\Delta x \cdot \Delta x & -\Delta x \cdot \Delta y & -\Delta x \cdot \Delta z \\ \Delta y \cdot \Delta x & \Delta y \cdot \Delta y & \Delta y \cdot \Delta z & -\Delta y \cdot \Delta x & -\Delta y \cdot \Delta y & -\Delta y \cdot \Delta z \\ \Delta z \cdot \Delta x & \Delta z \cdot \Delta y & \Delta z \cdot \Delta z & -\Delta z \cdot \Delta x & -\Delta z \cdot \Delta y & -\Delta z \cdot \Delta z \\ -\Delta x \cdot \Delta x & -\Delta x \cdot \Delta y & -\Delta x \cdot \Delta z & \Delta x \cdot \Delta x & \Delta x \cdot \Delta y & \Delta x \cdot \Delta z \\ -\Delta y \cdot \Delta x & -\Delta y \cdot \Delta y & -\Delta y \cdot \Delta z & \Delta y \cdot \Delta x & \Delta y \cdot \Delta y & \Delta y \cdot \Delta z \\ -\Delta z \cdot \Delta x & -\Delta z \cdot \Delta y & -\Delta z \cdot \Delta z & \Delta z \cdot \Delta x & \Delta z \cdot \Delta y & \Delta z \cdot \Delta z \end{bmatrix} \\
 &\quad + \frac{S_{(t)}}{L_{(t)}^3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)
 \end{aligned}$$

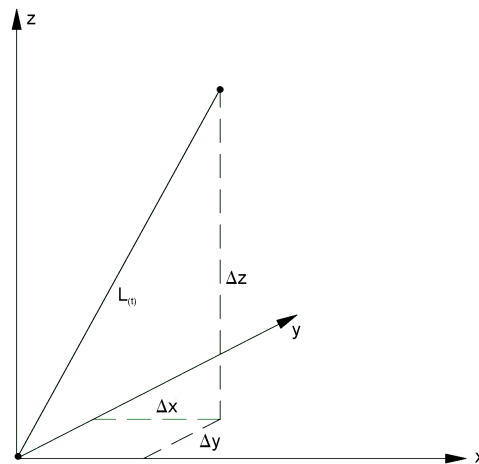


Abbildung 22: Seilelement

## 5.2 Inkrementell iterativer Lösungsalgorithmus

Für die Lösung der Gleichungen im Zeitbereich wird das Newmark-Verfahren mit den Parametern  $\beta = \frac{1}{4}$  und  $\gamma = \frac{1}{2}$  verwendet, da dieses Verfahren zumindest für lineare Systeme uneingeschränkt stabil ist. Das Vorgehen wird z. B. in [14] ausführlich erläutert.

Das in [?] abgeleitete mechanische Modell resultiert in einem Satz nichtlinearer gekoppelter Bewegungsgleichungen. Daher werden die nichtlinearen Terme zunächst mit Hilfe einer Tay-

lorreihenentwicklung linearisiert. Die auf diese Weise linearisierten Ausdrücke enthalten zum einen konstante Anteile, die nur von den Unbekannten des vorangegangenen Zeitschrittes abhängen. Diese Anteile gehen in die Lastseite der Gleichung ein. Zum anderen entstehen aber auch Anteile, die zusätzlich die inkrementellen Zuwächse der Unbekannten enthalten. Letztere können der tangentialen Massen-, Dämpfungs- bzw. Steifigkeitsmatrix zugeordnet werden.

$$\begin{aligned}
 F &\approx c_0 && \longrightarrow \underline{P} \\
 &+ c_1 \cdot \Delta x + c_2 \cdot \Delta y + c_3 \cdot \Delta z + c_4 \cdot \Delta \phi_1 + c_5 \cdot \Delta \phi_2 && \longrightarrow \underline{K}_T \\
 &+ c_6 \cdot \Delta \dot{x} + c_7 \cdot \Delta \dot{y} + c_8 \cdot \Delta \dot{z} + c_9 \cdot \Delta \dot{\phi}_1 + c_{10} \cdot \Delta \dot{\phi}_2 && \longrightarrow \underline{D}_T \\
 &+ c_{11} \cdot \Delta \ddot{x} + c_{12} \cdot \Delta \ddot{y} + c_{13} \cdot \Delta \ddot{z} + c_{14} \cdot \Delta \ddot{\phi}_1 + c_{15} \cdot \Delta \ddot{\phi}_2 && \longrightarrow \underline{M}_T \\
 &(c_i = \text{const})
 \end{aligned}$$

Ausgehend von dem bekannten dynamischen Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt (t-1) wird im Inkrementschritt eine erste Abschätzung der unbekannten Zustandsgrößen zum Zeitpunkt (t) vorgenommen.

$$\begin{aligned}
 \left( \underline{K}_{T(t-1)} + a_0 \cdot \underline{M}_{T(t-1)} + a_1 \cdot \underline{D}_{T(t-1)} \right) \cdot \Delta \underline{X}_{(t)}^0 &= \underline{P}_{(t)} - \underline{P}_{(t-1)} \\
 &+ \underline{M}_{T(t-1)} \cdot \left[ a_2 \cdot \underline{\dot{X}}_{(t-1)} + (a_3 + 1) \cdot \underline{\ddot{X}}_{(t-1)} \right] \quad (37) \\
 &+ \underline{D}_{T(t-1)} \cdot \left[ (a_4 + 1) \cdot \underline{\dot{X}}_{(t-1)} + a_5 \cdot \underline{\ddot{X}}_{(t-1)} \right] \\
 \Rightarrow \underline{X}_{(t)}^0 &= \underline{X}_{(t-1)} + \Delta \underline{X}_{(t)}^0 \\
 \underline{\ddot{X}}_{(t)}^0 &= a_0 \cdot \Delta \underline{X}_{(t)}^0 - a_2 \cdot \underline{\dot{X}}_{(t-1)} - a_3 \cdot \underline{\ddot{X}}_{(t-1)} \\
 \underline{\dot{X}}_{(t)}^0 &= \underline{\dot{X}}_{(t-1)} + a_6 \cdot \underline{\ddot{X}}_{(t-1)} + a_7 \cdot \underline{\ddot{X}}_{(t)}^0
 \end{aligned}$$

Die dafür erforderlichen Konstanten berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} & a_1 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t} & a_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1 \\
 a_4 &= \frac{\gamma}{\beta} - 1 & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[ \frac{\gamma}{\beta} - 2 \right] & a_6 &= \Delta t \cdot [1 - \gamma] & a_7 &= \gamma \cdot \Delta t
 \end{aligned}$$

Nach dem Inkrementschritt befindet sich das System aufgrund des Linearisierungsfehlers für gewöhnlich nicht im Gleichgewicht. Daher wird anschließend eine Gleichgewichtskorrektur innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens durchgeführt. Dazu erfolgt für jede Iteration i eine erneute Linearisierung um den aktualisierten Verformungszustand.

$$\begin{aligned}
 \left( \underline{K}_{T(t)}^{i-1} + a_0 \cdot \underline{M}_{T(t)}^{i-1} + a_1 \cdot \underline{D}_{T(t)}^{i-1} \right) \cdot \Delta \underline{X}_{(t)}^i &= \underline{P}_{(t)} - \underline{M}_{T(t)}^{i-1} \cdot \underline{\ddot{X}}_{(t)}^{i-1} - \underline{D}_{T(t)}^{i-1} \cdot \underline{\dot{X}}_{(t)}^{i-1} - \underline{K}_{T(t)}^{i-1} \cdot \underline{X}_{(t)}^{i-1} \quad (38) \\
 \Rightarrow \underline{X}_{(t)}^i &= \underline{X}_{(t)}^{i-1} + \Delta \underline{X}_{(t)}^i \\
 \underline{\ddot{X}}_{(t)}^i &= \underline{\ddot{X}}_{(t)}^{i-1} + a_0 \cdot \Delta \underline{X}_{(t)}^i \\
 \underline{\dot{X}}_{(t)}^i &= \underline{\dot{X}}_{(t)}^{i-1} + a_1 \cdot \Delta \underline{X}_{(t)}^i
 \end{aligned}$$

## 6 Gleichgewichtslagen der Rinnsale

Zunächst werden die Gleichgewichtslagen der Rinnsale berechnet, da deren korrekte Ermittlung Voraussetzung dafür ist, dass die Rinnsale den Umschlagpunkt bei der entsprechenden Windgeschwindigkeit erreichen und dadurch der Stolperdrahteffekt eintreten kann.

### 6.1 Berechnung aus Druck- und Schubspannungsverteilungen

Zur Ermittlung der statischen Gleichgewichtslagen der Rinnsale nach Abschnitt 4.3.1 erfolgt eine Gleichgewichtsbetrachtung am Tropfen in tangentialer Richtung, wobei Effekte infolge Seil-schwingung unberücksichtigt bleiben.

$$m_{wi} \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_i + \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot U^2 \cdot \int_{\phi_u}^{\phi_o} c_p(\varphi_i + \beta_0 + \varepsilon) \cdot \sin \phi \cdot r \, d\phi = F_{SK_T} \quad (39)$$

Die sich daraus ergebenden Gleichgewichtslagen für einen symmetrisch angeströmten Seilquerschnitt mit und ohne Berücksichtigung des Scherkraftanteils  $F_{SK_T}$  ( $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $d = 0,10 \text{ m}$ ) sind in den Diagrammen 23 und 24 abgebildet. Der darin verwendete Winkel  $\alpha$  entspricht dem Winkel zwischen dem Staupunkt und dem Rinnsal. Der Scherkraftanteil hat einen großen Einfluss auf die Position der Rinnsale und kann somit nicht vernachlässigt werden.

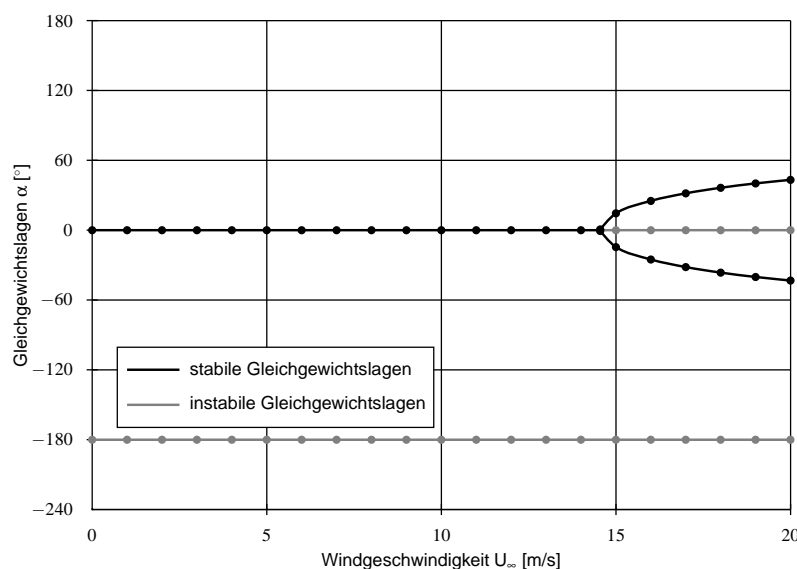


Abbildung 23: Gleichgewichtslagen der Rinnsale - unterkritisch, ohne  $F_{SK_T}$  ( $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $d = 0,10 \text{ m}$ )

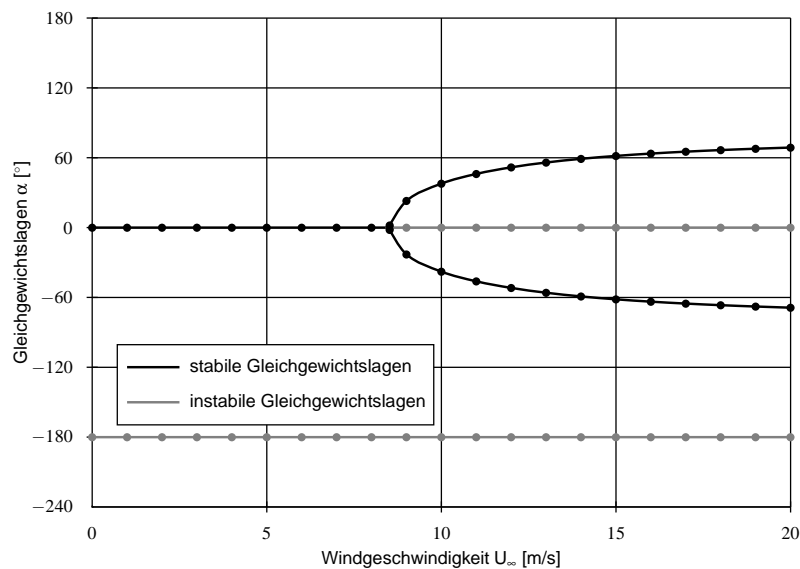


Abbildung 24: Gleichgewichtslagen der Rinnsale - unterkritisch, mit  $F_{SKT}$  ( $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $d = 0,10 \text{ m}$ )

Bei einer Anströmgeschwindigkeit von 0 m/s wirkt lediglich die Gewichtskraft des Tropfens. Die untere Gleichgewichtslage ( $\alpha = 0^\circ$ ) ist daher stabil, die obere ( $\alpha = -180^\circ$ ) instabil. Dies ist solange der Fall, bis die kritische Windgeschwindigkeit erreicht wird. Dann wird die untere Gleichgewichtslage instabil. Das Rinnsal wird nach oben gedrückt und nimmt eine der zwei neu entstehenden, stabilen Gleichgewichtslagen ein.

Die Stabilität der Gleichgewichtslagen kann für Modelle mit nur einer Zustandskomponente direkt aus den  $x$ - $f(x)$ -Diagrammen abgelesen werden. Das Vorgehen soll anhand eines einfachen Beispiels erläutert werden. Die Differentialgleichung I. Ordnung

$$\dot{x} + \underbrace{kx}_{f(x)} = 0 \quad (40)$$

lässt sich mit Hilfe des unten abgebildeten mechanischen Modells veranschaulichen. Die  $x$ - $f(x)$ -Diagramme für  $k > 0$  und  $k < 0$  sind ebenfalls in Abbildung 25 dargestellt.

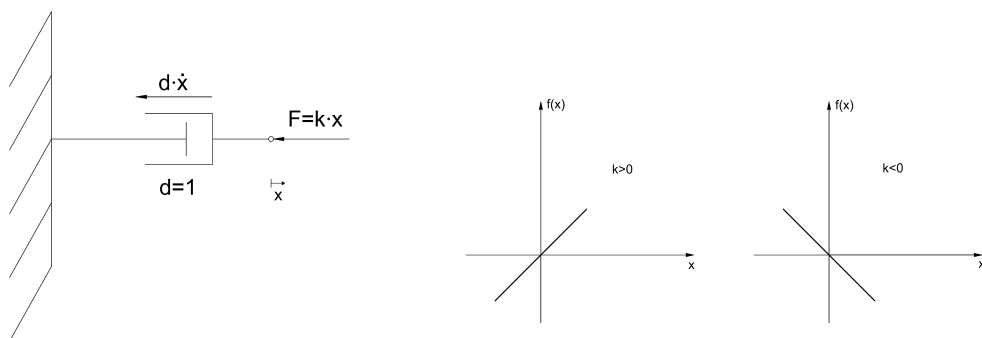


Abbildung 25: Mechanisches Modell zu Gleichung (40)

Weist  $f(x)$  im Bereich der Nullstelle eine positive Steigung auf, wie im Fall von  $k > 0$ , handelt es sich um eine stabile Nullstelle: Wird das System in positive  $x$ -Richtung ausgelenkt ( $x > 0$ ), so ergibt sich eine Bewegung in negative Richtung ( $\dot{x} < 0$ ). Bei einer Auslenkung in negative  $x$ -Richtung ( $x < 0$ ), entsteht eine Bewegung in positive Richtung ( $\dot{x} > 0$ ). Das System strebt demnach der Nulllage zu.

Bei einer Nullstelle mit negativer Steigung von  $f(x)$  ( $k < 0$ ) hingegen handelt es sich um eine instabile Nullstelle, da eine Auslenkung in eine Richtung auch eine Bewegung in die entsprechende Richtung hervorruft und sich das System somit noch weiter von der Nulllage entfernt. Die Stabilität der Gleichgewichtslagen kann ebenso formal über das Vorzeichen des Realteils der Eigenwerte bestimmt werden. Nach Lyapunovs Theorem ist ein System instabil, sobald ein positiver Realteil existiert [4].

Mit dem Ansatz

$$x(t) = \hat{x} \cdot e^{\lambda t}$$

ergibt sich der Eigenwert zu

$$\lambda = -k.$$

Demnach ist das System für  $k > 0$  stabil und für  $k < 0$  instabil.

Geht man von einem sich in Ruhe befindenden Seil aus, lautet die Bewegungsgleichung des Tropfens gemäß Gleichung 4 bzw. 5

$$m_{wi} \cdot R \cdot \ddot{\varphi}_i + (L_{Rinnsal} \cdot L_{Bogen}) \cdot \mu_w \cdot \frac{R \cdot \dot{\varphi}_i}{h} + \underbrace{m_{wi} \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_i + F_{wTi}}_{f(\varphi)} = 0 \quad (41)$$

Die  $\varphi$ - $f(\varphi)$ -Verläufe für das oben beschriebene symmetrisch angeströmte Seil sind für zwei verschiedene Werte von  $U_\infty$  in Abbildung 26 dargestellt. Anhand derer können die stabilen und instabilen Gleichgewichtslagen in Diagramm 23 identifiziert werden.

Die Gleichgewichtslagen für ein unsymmetrisch angeströmtes Seil mit den Eingangswerten  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$  und  $d = 0,14 \text{ m}$  sind in Abbildung 27 dargestellt. Sie ergeben für das untere Rinnsal im überkritischen Bereich keine allzu gute Übereinstimmung mit den von Hikami [12] gemessenen Werten. Dies ist auf die Unsicherheit der Eingangswerte zurückzuführen. Den Berechnungen liegen Druck- und Schubspannungsverteilungen zugrunde, die an aerodynamisch glatten, senkrechten Zylindern gemessen wurden. Die Oberflächenbeschaffenheit des Kabels hat jedoch einen entscheidenden Einfluss. O. Flamand [9] beobachtete in Experimenten, dass es bei einer sauberen PE-Oberfläche zu keiner Anregung kam, da sich kein oberes Rinnsal ausbildete. Bei einer verschmutzten Kabeloberfläche hingegen traten Schwingungen auf. Wie die Untersuchungen von W. Bursnall und L. Loftin [5] zeigen, wird die Umströmung auch durch



die Seilneigung verändert, da im Gegensatz zum senkrechten Zylinder beim geneigten Zylinder eine in Richtung der Kabelachse wirkende Komponente der Windgeschwindigkeit auftritt. Als weitere wichtige Eingangswerte für die statischen Gleichgewichtslagen der Rinnsale sind die Rinnsalabmessungen zu nennen, zu denen in der Literatur sehr widersprüchliche Angaben zu finden sind.

Im vorliegenden Fall werden experimentell ermittelte Gleichgewichtslagen denen des Berechnungsmodells gegenübergestellt, wobei die kritische Windgeschwindigkeit, bei der ein Umschlag von der unterkritischen zur überkritischen Umströmung stattfindet, bekannt ist. Bei der Berechnung ohne Eingangswerte aus vorangegangenen Experimenten besteht die zusätzliche Schwierigkeit, den Umschlagpunkt zu bestimmen. W. Bursnall und L. Loftin [5] beziehen die Reynoldszahl auf die senkrecht zum Querschnitt wirkende Komponente der Windgeschwindigkeit. Sie schlussfolgern jedoch, dass diese nicht ausreichend ist, um die kritischen Bedingungen zu überprüfen. Daher empfiehlt N. Cosentino [6] den Wert  $Re_t$ , der die ungestörte Anströmung auf die Kabelabmessung in Anströmungsrichtung bezieht.

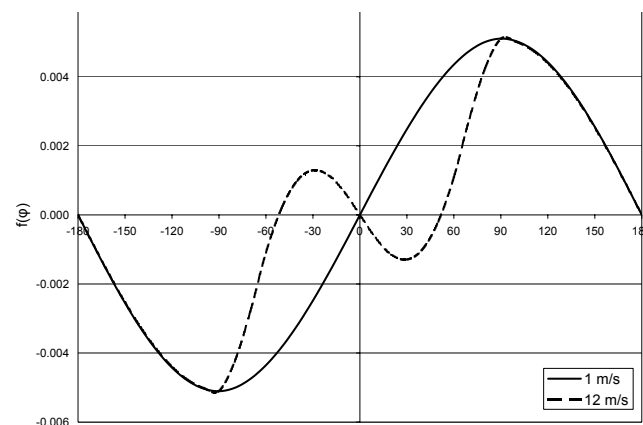


Abbildung 26:  $\varphi$ - $f(\varphi)$ -Diagramm ( $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $d = 0,10$  m)

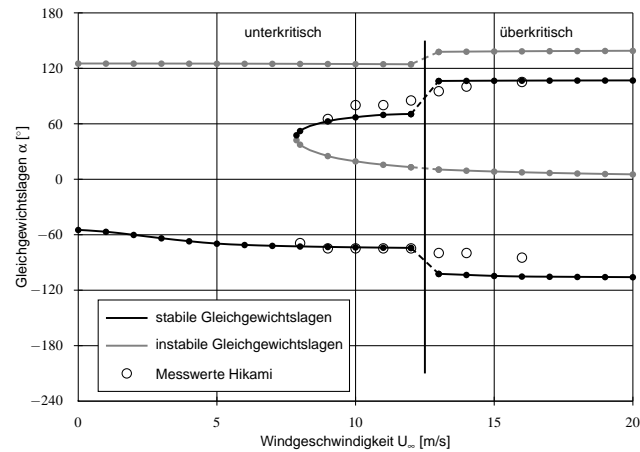


Abbildung 27: Gleichgewichtslagen der Rinnsale ( $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $d = 0,14$  m)

## 6.2 Berechnung mit Hilfe des $c_T$ -Beiwertes

Aufgrund der zuvor aufgezeigten Probleme, die bei der Berechnung der aerodynamischen Kräfte auf die Rinnsale aus Druck- und Schubspannungsverteilungen auftreten, werden die tangentialen Windkräfte, wie in Abschnitt 4.3.2 beschrieben, mit Hilfe eines Beiwertes  $c_T$  ausgedrückt. Die Abbildungen 28 und 29 zeigen die so ermittelten Gleichgewichtslagen für ein Seil mit den Eingangswerten  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ . Die Berechnung erfolgt instationär, wobei die Windgeschwindigkeit langsam gesteigert wird. Bei Erreichen der berechneten Verzweigungsgeschwindigkeit wirkt zusätzlich eine Störung aus Imperfektionen  $P_{imp}$  auf das Rinnsal, wodurch das Rinnsal die instabile Gleichgewichtslage an der Unterseite des Kabels verlässt und nach oben gedrückt wird. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Messungen von Seidel.

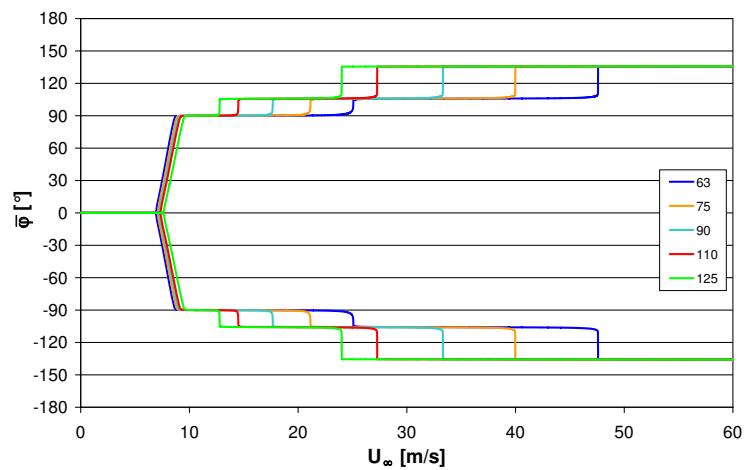


Abbildung 28: Gleichgewichtslagen der Rinnsale für verschiedene Seildurchmesser [mm]  
 $(\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ)$

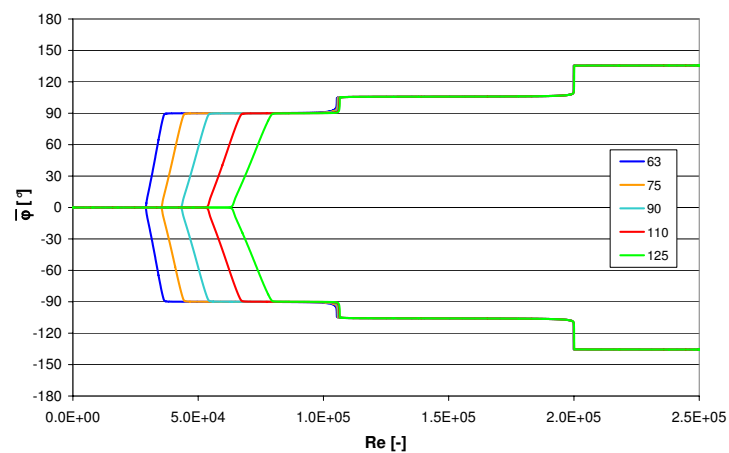


Abbildung 29: Gleichgewichtslagen der Rinnsale für verschiedene Seildurchmesser [mm]  
 $(\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ)$

## 7 Zusammenfassung

In dem vorliegenden Zwischenbericht wurden die überarbeiteten, auf dem mechanischen Modell von Seidel [20] basierenden Gleichungen vorgestellt. Zur Überprüfung der auf die Rinnsale einwirkenden Kräfte wurden die statischen Gleichgewichtslagen der Rinnsale berechnet. Dies geschah mit zwei unterschiedlichen Ansätzen. Im ersten wurde die aerodynamischen Kräfte aus den Druck- und Schubspannungsverteilungen eines Kreiszylinders berechnet. Die Ergebnisse zeigen, dass eine genauere Untersuchung der Eingangswerte erforderlich ist. Daher sollten zunächst die Schub- und Druckspannungsverteilungen sowie die kritischen Reynoldszahlen für einen rauen Zylinder mit verschiedenen Neigungen mit Hilfe von CFD-Berechnungen ermittelt werden, bevor eine genauere Untersuchung der Regen-Wind induzierten Schwingungen eines nichtlinearen Kabels erfolgt.

Im zweiten Ansatz wurden die tangentialen Kräfte mit Hilfe eines Beiwertes ausgedrückt, der aus experimentell bestimmten Gleichgewichtslagen ermittelt wurde. Die so berechneten Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Messungen von Seidel.

## Literatur

- [1] ACHENBACH, E. Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in cross-flow up to  $Re=5 \times 10^6$ . *Journal of Fluid Mechanics* 34 (1968), 625–639.
- [2] BATHE, K.-J. *Finite-Elemente-Methoden*, 2. Ausg. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo: Springer, 2002.
- [3] BLASIUS, H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Z. Math. Physik* 56 (1908), 1–37.
- [4] BRONSTEIN, I. N. & SEMENDJAEV, K. A. *Taschenbuch der Mathematik*, 5. Ausg. Verlag Harri Deutsch, 2000.
- [5] BURSNALL, W. & LOFTIN, L. Experimental Investigation of the Pressure Distribution About a Yawed Circular Cylinder in the Critical Reynolds Number Range. *Natinal Advisory Committee for Aeronautics Technical Note 2463* (1951).
- [6] COSENTINO, N. *Rain-wind induced vibration of cables*. Dissertation, Università degli studi di Bologna, 2002.

- [7] DALLMANN, U. & SCHEWE, G. On topological changes of separating flow structures at transition Reynolds numbers. *AIAA 19th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Laser Conference, Honolulu, Hawaii*, AIAA-87-1266 (1987).
- [8] EVANS, H. L. *Laminar Boundary-Layer Theory*. Addison-Wesley Publ. Co., 1968.
- [9] FLAMAND, O. Rain-Wind Induced Vibrations of Cables. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 57 (1995), 353–362.
- [10] GÖLLING, B. *Experimentelle Untersuchungen des laminar-turbulenten Überganges der Zylindergrenzschichtströmung*. Dissertation, Georg-August-Universität zu Göttingen, 2001.
- [11] HAKENESCH, P. R. Folien zur Vorlesung Fluidmechanik, K3 Strömung von Fluiden Teil 3. <http://www.lrz-muenchen.de/hakenesch/>, Stand 25.11.2007.
- [12] HIKAMI, Y. & SHIRAISHI, N. Rain-Wind Induced Vibrations of Cables in Cable Stayed Bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 29 (1988), 409–418.
- [13] LAKSHMINARAYANA, B. *Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery*. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- [14] LANG, C. Beitrag zur Theorie, Numerik und Anwendung nichtlinearer Algorithmen zur statischen und dynamischen Analyse von Stahlbetonrotationsschalen, Juni 2003.
- [15] MEIER, G. E. A. (Hrsg.). *Ludwig Prandtl, ein Führer in der Strömungslehre*. Braunschweig: Vieweg, 2000.
- [16] PEIL, U. & STEILN, O. Regen-Wind-induzierte Schwingungen - ein State-of-the-Art-Report. *Stahlbau* 76 (2007), 34–46.
- [17] ROSHKO, A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number. *J. FluidMech.* 10 (1961), 345–356.
- [18] SCHLICHTING, H. (Hrsg.). *Grenzschicht-Theorie*, 9. Ausg. Braun-Verlag, Karlsruhe, 1997.
- [19] SCHLICHTING, H. & GERSTEN, K. (Hrsg.). *Grenzschicht-Theorie*, 5. Ausg. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1965.
- [20] SEIDEL, C. & DINKLER, D. Phänomenologie und Modellierung Regen-Wind induzierter Schwingungen. *Bauingenieur Bd.* 79 (2004), 145–153.
- [21] SEIDEL, C. & DINKLER, D. Rain-wind induced vibrations - phenomenology, mechanical modelling and numerical analysis. *Computers & Structures* 84 (2006), 1584–1595.

- [22] VAN OUDHEUSDEN, B. W. On the quasi-steady analysis of one-degree-of-freedom galloping with combined translational and rotational effects. *Nonlinear Dynamics* 8, 4 (1995), 435–451.